

## 無理方程式・無理不等式の同値変形について

1.  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$
2.  $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B^2 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$
3.  $B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$  または  $\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$

## 解説

1.  $\sqrt{A} = B$  と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$$\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2 \text{ は真} \quad \dots \text{①}$$

補足

$\sqrt{A}$  より,  $A \geq 0$  が保証されるから, 仮定に  $A \geq 0$  は不要。

$$A = B^2 \Rightarrow B = \pm\sqrt{A} \text{ は真より,}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \sqrt{A} \text{ は真} \quad \dots \text{②}$$

補足

$A = B^2 \geq 0$  より,  $A \geq 0$  は不要。

しかし,  $B \geq 0$  であることは保証できないから,  $B \geq 0$  が必要。

①, ②より,

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

2.  $\sqrt{A} \leq B$  と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$$\sqrt{A} \leq B \Rightarrow A \leq B^2 \text{ は真} \quad \dots \text{③}$$

補足

$0 \leq \sqrt{A} \leq B$  より,  $A \leq B^2$  が成り立つ。

③の逆が成り立つための条件

$A \leq B^2$  だけでは,  $A \geq 0$  が保証されないから,  $\sqrt{A}$  とできるには  $A \geq 0$  が必要。

また, このとき  $\sqrt{A} \geq 0$  だから,  $\sqrt{A} \leq B$  が成り立つには  $B \geq 0$  が必要。

よって, 逆が成り立つための条件は,

$$A \leq B^2, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0 \quad \dots \text{④}$$

③, ④より,

$$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B^2 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

3.  $B \leq \sqrt{A}$  と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$B \leq \sqrt{A}$  には,  $B \leq 0 \leq \sqrt{A}$  の場合と  $0 \leq B \leq \sqrt{A}$  の場合がある。

よって,

$$B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow B \leq 0 \leq \sqrt{A} \text{ または } 0 \leq B \leq \sqrt{A} \quad \dots \textcircled{5}$$

$B \leq 0 \leq \sqrt{A}$  と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$B \leq 0$  以外に  $A$  を  $\sqrt{A}$  とできなければならないから  $A \geq 0$  が必要。

$$\text{よって, } B \leq 0 \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{6}$$

$0 \leq B \leq \sqrt{A}$  と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$B \geq 0$  以外に  $B^2 \leq A$  が必要であるが,

$\sqrt{A}$  とできるための  $A \geq 0$  は  $B^2 \leq A$  で保証されるから不要。

$$\text{よって, } 0 \leq B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{7}$$

⑤, ⑥, ⑦より,

$$B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$$